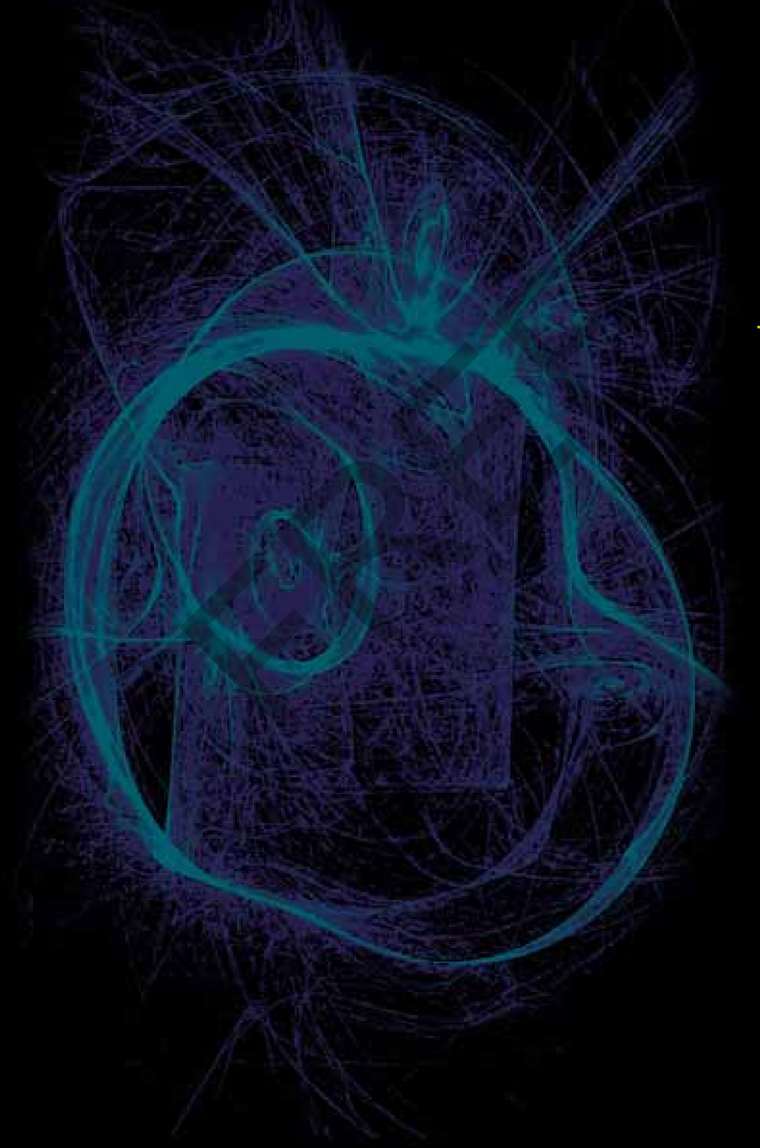
LA MÚSICA FRACTAL

POR GUSTAVO DÍAZ-JEREZ
Pianista y compositor
Profesor de piano de Musikene



La estrecha relación que existe entre música y matemáticas ha fascinado a grandes compositores a lo largo de la historia. Muchos han incorporado procesos matemáticos en su obra.
Ya en el siglo XI, Guido D'Arezzo utilizaba un método semi-estocástico (aleatorio) para generar material melódico a partir de las vocales de los textos que empleaba.
En el siglo XV, Guillaume Dufay incorporó las medidas arquitectónicas de la catedral de Santa María del Fiore en su motete isorítmico Nuper Rosarum Flores así como la proporción áurea en algunas de sus obras. De sobra es sabido el interés de Bach por las matemáticas y las proporciones numéricas, que utilizó abundantemente en su obra. Mozart experimentó con modelos estocásticos en su Musikalisches Würfelspiele.
Ya en el siglo XX, Debussy y Bartók, entre otros, aplicaron sistemáticamente modelos matemáticos a su obra. La aparición de los ordenadores y su potencia de cálculo ha permitido hoy incorporar modelos matemáticos a la composición cuya complejidad los hubiera hecho inviables antaño. Xenakis, Ligeti, Boulez, Messiaen, Babbitt, Carter, entre otros muchos, han hecho de las matemáticas parte integral de su sistema compositivo.

Mapping

El empleo de modelos matemáticos implica, en mayor o menor medida, un proceso denominado *mapping*. El *mapping* o "mapeado" consiste en "traducir" los datos del procedimiento matemático, de naturaleza numérica, a parámetros musicales. Estos datos pueden proceder de las fuentes más diversas, desde complejos algoritmos, como veremos más adelante, hasta conjuntos numéricos derivados de la meteorología, la bolsa, etc. Los parámetros musicales pueden ser elementales, como la altura del sonido, el ritmo, o la dinámica, o complejos como el fraseo e incluso la forma y estructura global de la obra.

El siguiente ejemplo nos muestra en qué se fundamenta este proceso. Tomemos como modelo numérico los diez primeros dígitos del número pi (3.141592653). Por simplicidad, los parámetros musicales serán una escala cromática de Do4 a Si4 (12 valores), y 4 valores rítmicos (fig. 1). Estos conjuntos han sido elegidos arbitrariamente para este ejemplo. Es esencial que numeremos los elementos a partir del cero.

Figura 1. Conjuntos musicales.

Los dos tipos de *mapping* más utilizados son la operación módulo y la normalización. La operación módulo (*Mod*) es el resto de la división entera entre dos números, siendo el dividendo el valor sobre el que se realiza el *mapping* y el divisor el número de elementos en nuestro conjunto de parámetros musicales.

En caso de que el dividendo sea fraccionario, será necesario aproximarlo al entero más cercano. El resultado de una operación módulo está siempre entre cero y el número de elementos del conjunto de paramentos menos uno. Es por esto que es preciso numerarlos empezando por el cero, por ejemplo:

7 Mod 4 = 3, porque 7/4 da resto 3
8 Mod 4 = 0, porque 8/4 da resto 0

El resultado nos dará el índice del elemento que debemos elegir dentro del conjunto de parámetros musicales.

El *mapping* normalizado precisa de una fórmula más compleja:

$$\text{Index} = round\left[\frac{\text{v - min.}}{\text{max. - min.}} \times (\text{n} - 1)\right]$$

Figura 2. *Mapping* normalizado.

Siendo max. y min. los valores máximos y mínimos, respectivamente, dentro del conjunto numérico; v el valor al que se le aplica el *mapping* y n el número de elementos en el conjunto de parámetros musicales. Ya que el resultado (*Índex*) ha de ser un número entero, hemos de aproximarlo al valor entero mis cercano (*round*). El *mapping* normalizado tiene la ventaja de poder incorporar valores fraccionarios. El resultado (*Índex*) nos dará, igual que con la operación módulo, el elemento a elegir del conjunto de parámetros musicales.

Aplicando estos procesos a nuestros conjuntos anteriormente descritos da como resultado los siguientes motivos:

Figura 3. Motivos resultantes.

Es evidente que el tipo de *mapping* elegido modifica sensiblemente el resultado. Como regla general el *mapping* normalizado es más apropiado para conjuntos de valores fraccionarios y cuyos elementos están acotados dentro de unos valores homogéneos. El *mapping* por operación módulo es más conveniente en conjuntos tales como series numéricas divergentes (por ejemplo, la serie de Fibonacci). Sin embargo, ambos tipos pueden producir resultados satisfactorios a partir del mismo conjunto de datos. El resultado final depende, en gran medida, no sólo del conjunto numérico, sino de las decisiones tomadas por el compositor a la hora de elegir tanto los parámetros musicales, como el sistema de *mapping*.

Música algorítmica

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones (o reglas) que permite hallar la solución de un problema dado. Los algoritmos han estado presentes en la composición musical durante siglos. Por ejemplo, las reglas del contrapunto, la armonía, y la conducción de voces en la música occidental pueden considerarse algorítmicas. *El arte de la fuga* BWV 1080 de J. S. Bach es uno de los ejemplos más sobresalientes de música algorítmica. Tanto el sistema compositivo de Hindemith como el dodecafonismo ideado por Schönberg son de naturaleza algorítmica. Es un error confundir "música algorítmica" con "música generada a partir de algoritmos". Esto último es de naturaleza mucho más simple, ya que en muchos casos se reduce a "convertir" un resultado numérico a parámetros musicales a través del *mapping*. La utilización de algoritmos generativos no es condición suficiente para que un sistema compositivo pueda considerarse algorítmico. Los procesos generativos pueden agruparse en dos grandes grupos: deterministas y estocásticos. Los deterministas siempre producen los mismos resultados a partir de los mismos datos iniciales. Los estocásticos incluyen aleatoriedad y, naturalmente, producirán resultados diferentes. El proceso de *mapping*, anteriormente descrito, es fundamental a la hora de "transcribir" los datos generados a parámetros o estructuras musicales.

Música y fractales

Quizá la más atractiva y prometedora de las amalgamas entre música y matemáticas en la actualidad sea la misteriosa "música fractal". Muchos hemos oído alguna vez el término "música fractal". Sin embargo, existe gran confusión a la hora de definir con exactitud en qué consiste y qué condiciones son necesarias para que una obra pueda considerarse "fractal".

Los *fractales* son una disciplina matemática relativamente joven, remontándose sus orígenes a finales del siglo XIX.

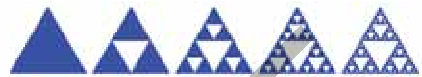


Figura 4. Generación del triángulo de Sierpinsky

Un *fractal* es un objeto semi-geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas. El término proviene del Latín *fractus*, que significa roto o fragmentado. Los fractales deben cumplir una serie de requisitos para considerase como tales. Entre ellos, los más importantes son poseer detalle a cualquier escala de observación, auto-similitud (exacta o estadística) y poder ser definido con un simple algoritmo recursivo. Entre los fractales más sencillos se encuentran el *conjunto de Cantor*, la *alfombra de Menger* y el *triángulo de Sierpinsky* (fig. 4). El *conjunto de Mandelbrot* es posiblemente el más conocido y popular de los fractales (fig. 5). Toma su nombre de su descubridor, Benoît Mandelbrot, matemático de origen polaco considerado el padre de los fractales. Numerosos artistas gráficos han utilizado los fractales en su obra por su gran atractivo estético.

En la naturaleza existen numerosas estructuras que son consideradas fractales: las nubes, los copos de nieve, la estructura ramificada de los bronquios, los relámpagos, entre otras muchas. Dos ejemplos particularmente evidentes son los helechos y el romanesco (fig. 6). Estos fractales naturales muestran una auto-similitud estadística (no exacta), y, al contrario que los fractales matemáticos, poseen detalle en una escala de recursión finita.

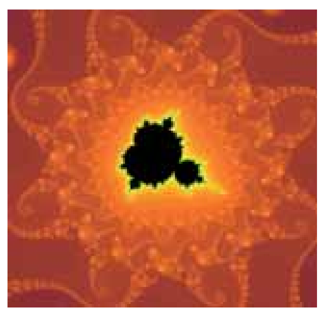


Figura 5. Conjunto Mandelbrot

Figura 6. Romanesco, un fractal natural

Es lógico pensar que la música fractal deba heredar de algún modo las propiedades que definen a los fractales (tanto matemáticos como naturales). Las características principales de los fractales–poseer detalle y repetición de estructuras básicas a diferentes escalas de observación–podrían musicalmente incorporarse como *escalado motívico* y *escalado estructural*.

Lo cierto es la música fractal lleva entre nosotros, al menos en su forma más rudimentaria, más de seis siglos. El escalado motívico ya era usado sistemáticamente por los grandes maestros Johannes Ockeghem y Josquin des Prez, que desarrollaron el arte del canon mensurado o *prolatio canon*. Este tipo de canon se caracteriza por utilizar motivos melódicos o rítmicos que se repiten en diferentes voces a diferentes tempi. En el siguiente ejemplo, una sección del *Agnus Dei* de la primera *Missa l'homme armé super voces musicales*, de Josquin des Prez, las voces inferiores se mueven a 1/3 y 2/3, respectivamente, de la velocidad de la voz superior.

Figura 7.
Sección del *Agnus Dei* de la primera *Missa l'homme armé* de Josquin des Prez.

Ockeghem explora en profundidad esta técnica en su *Missa* prolationum. El *Canon* a 4 per *Augmentationem et Diminutionem*, último de una serie de 14 cánones escritos como apéndix a las *Variaciones Goldberg*, de J. S. Bach, es un magnífico ejemplo de esta técnica.

El *escalado estructural* supone un paso más en la concepción de la música fractal. Consiste en aplicar el concepto de auto-similitud, propia de los objetos fractales, a macro-estructuras musicales tales como el fraseo y la forma. Harlan J. Brothers, en su artículo *Structural Scaling in Bach's Cello Suite No. 3* (*Fractals*, vol. 15, nº. 1, 2007; pag. 89-95), nos revela cómo la forma recursiva de la Bourrée, Parte I, en esta Suite puede analizarse tomando como referencia el *conjunto de Cantor* (fig. 8), uno de los fractales más estudiados.

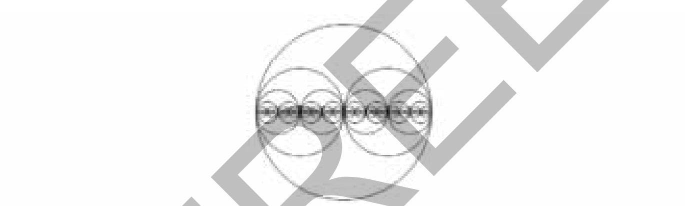


Figura 8. *Conjunto de Cantor*

Un ejemplo más contemporáneo de escalado estructural es el estudio para piano nº 13 de G. Ligeti *L'escalier du diable*, inspirado en la representación gráfica que lleva el mismo nombre (fig. 9). Curiosamente, *la escalera del diablo* también se construye a partir de un *conjunto de Cantor*, pero, aunque lo parezca, en sí misma no es de naturaleza fractal.

Figura 9. *La Escalera del Diablo*

Motivos auto-similares

Otro elemento interesante, estrechamente vinculado al paradigma de la música fractal, es los motivos auto-similares. Un motivo es auto-similar cuando contiene una o más copias a escala de sí mismo. El siguiente motivo, aunque musicalmente trivial, es útil para aclarar este concepto:

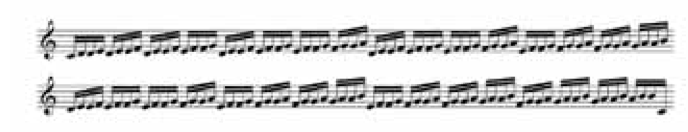


Figura 10.
Motivo auto-similar derivado de la secuencia *Morse-Thue*.

Un análisis superficial revela que, si elegimos sólo las notas impares, el resultado es idéntico al original. Si de este nuevo motivo, a su vez, elegimos las notas impares, también nos da como resultado la secuencial original, y así sucesivamente. De hecho, el motivo contiene infinitas copias a escala de sí mismo. En este caso, por simplicidad, hemos utilizado en el proceso de *mapping* sólo la altura del sonido. Un ejemplo más elaborado incluiría así mismo parámetros rítmicos, dinámicos, etc.

Las apariencias engañan

Existen numerosos malentendidos y desinformación acerca de la música fractal. Uno de los errores más extendidos es suponer que si un algoritmo genera una imagen fractal, éste (a través del *mapping*) generará también música fractal. Aunque es cierto que algunos algoritmos pueden generar secuencias que cumplan con los requisitos de la fractalidad, esto no está en absoluto garantizado. Otro error muy común es asumir que, ya que muchos fractales son generados a partir de procesos iterativos, cualquier proceso iterativo generará estructuras fractales. Finalmente, no debemos confundir auto-similitud con fractalidad. La auto-similitud es una condición necesaria, aunque no suficiente, de la fractalidad. Por ejemplo, la estructura de una cebolla y las matrioskas (muñecas rusas), aunque son auto-similares no son fractales: no contienen un mínimo de dos regiones similares en las cuales la disposición de los elementos imiten la estructura del objeto como un todo.

Conclusiones

Este artículo no pretende ser más que una mera introducción y, como tal, apenas araña la superficie de este apasionante tema. La conjunción de todo lo expuesto anteriormente es lo que, a juicio del autor, sienta las bases del paradigma de la música fractal. Como cualquier otro sistema compositivo, éste es sólo una herramienta, un instrumento al servicio de la creatividad del compositor.